ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Συναρτήσεις Green και εφαρμογές

Περιεχόμενα

- Κατασκευή συναρτήσεων Green.
  - Μέθοδος υπολογισμού με συρραφή λύσεων.
  - Μέθοδος υπολογισμού με ιδιοσυναρτήσεις.
- Ενδεικτικά παραδείγματα.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN

Ορισμός και χρήση στην επίλυση ΔΕ

Έστω ότι ζητείται η λύση ΔΕ της μορφής

$$L_x y(x) = f(x) \ , \qquad x \in [a, b] \quad (\text{μπορεί να είναι ανοιχτό}) \ , \tag{1}$$

όπου L_x είναι διαφορικός τελεστής και $f(x)$ δοθείσα συνάρτηση. Η γενική της λύση είναι

$$y(x) = y_h(x) + \int_a^b dx' G(x, x') f(x') \ , \tag{2}$$

όπου $y_h(x)$ η λύση της ομογενούς

$$L_x y_h(x) = 0 \ , \qquad x \in [a, b] \tag{3}$$

και η $G(x, x')$ είναι η λεγόμενη συνάρτηση Green που ικανοποιεί την ΔΕ Green

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x') \ , \qquad x \in [a, b] \ . \tag{4}$$

Μέθοδος υπολογισμού με συρραφή λύσεων

Έστω ότι επιζητούμε τη συνάρτηση Green για τον τελεστή

$$L_x G(x,x') = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,x')}{dx}\right) + q(x)G(x,x') = \delta(x-x') \ . \quad (5)$$

Για $x \neq x'$ η συνεχής λύση στο $x = x'$ είναι

$$G(x,x') = A\left\{ \begin{array}{ll} y_L(x)y_R(x') \ , & x \leqslant x' \\ y_R(x)y_L(x') \ , & x \geqslant x' \end{array} \right\} \ , \quad (6)$$

όπου $y_{L,R}$ επιλύουν την ομογενή ΔΕ εκατέρωθεν του x' και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα:

- Στο αριστερό άκρο για $x = a$ χρησιμοποιούμε την $y_L(x)$.
- Στο δεξί άκρο για $x = b$ χρησιμοποιούμε την $y_R(x)$.

Λόγω της παρουσίας της $\delta(x-x')$ στην εξίσωση Green η πρώτη παράγωγος της $G(x,x')$ δεν μπορεί να είναι συνεχής.

- Ολοκληρώνουμε κα τα δύο μέλη της (5) στο διάστημα $x \in [x'-\epsilon, x'+\epsilon]$

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx\ \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,x')}{dx}\right) + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx\ q(x)G(x,x') = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx\ \delta(x-x')\ , \qquad (7)$$

  όπου ϵ το ήμισυ του εύρους του διαστήματος ολοκλήρωσης. Τελικά θα πάρουμε το όριο $\epsilon \to 0$.

  - Ο 1ος όρος του αριστερού μέλους είναι ολική παράγωγος.
  - Ο 2ος όρος του αριστερού μέλους τείνει στο μηδέν όταν $\epsilon \to 0$ λόγω του πεπερασμένου των $q(x)$ και $G(x,x')$.
  - Το δεξί μέλος είναι απλά 1.

- Τελικά απ' την ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου έχουμε

$$p(x')\left(\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=x'+\epsilon} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=x'-\epsilon}\right) = 1\ , \qquad (8)$$

- Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση έχουμε

$$A\left[y_R'(x')y_L(x') - y_L'(x')y_R(x')\right] = \frac{1}{p(x')}\ .$$

- Όμως η έκφραση στην παρένθεση στο αριστερό μέλος είναι η Wronskian W και ως εκ τούτου $p(x)W(x)$ =σταθερά, απ΄ τη γενική θεωρία ΔΕ (να δειχθεί και ώς [Άσκηση]).
- Άρα η σταθερά A δεν εξαρτάται απ΄ το σημείο x' και μπορεί να υπολογισθεί σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [a, b]$

$$A = \frac{1}{W(x_0)p(x_0)}\ .$$

- Βλέπουμε ότι η Green υπακούει την ιδιότητα συμμετρίας

$$G(x, x') = G(x', x)\ .$$

- Τελικά η λύση της $L_x y = f(x)$ είναι της μορφής

$$\begin{aligned} y(x) \quad &= \quad y_{\mathrm{h}}(x) + A\Big[y_R(x)\int_a^x dx'\ y_L(x')f(x') \\ &\qquad + y_L(x)\int_x^b dx'\ y_R(x')f(x')\Big]\ , \end{aligned}$$

όπου $y_{\mathrm{h}}(x)$ η λύση της ομογενούς [Άσκηση].

Μέθοδος υπολογισμού με ιδιοσυναρτήσεις

Έστω ότι ήδη έχουμε επιλύει το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$L_x \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \ , \qquad x \in [a, b] \ , \tag{9}$$

με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος.

- Αν ισχύει για τις ιδιοτιμές $\lambda_n \neq 0, \ \forall n$, τότε η συνάρτηση Green έχει την εξής έκφραση

$$G(x, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n} \ . \tag{10}$$

- Χρησιμοποιώντας και τη σχέση πληρότητας

$$\sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x') = \delta(x - x') \ , \tag{11}$$

  εύκολα επαληθεύεται η εξίσωση Green (4).

- Σε περίπτωση συνεχούς φάσματος το προηγούμενο άθροισμα αντικαθίσταται ή συνοδεύεται και με ολοκλήρωμα.

Μηδενικές ιδιοτιμές και τροποποιημένη συνάρτηση Green: Αν έστω και μια ιδιοσυνάρτηση αντιστοιχεί σε μηδενική ιδιοτιμή η (10) δεν ισχύει. Ορίζουμε την τροποποιημένη συνάρτηση Green

$$G_{\text{mod}}(x,x') = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n} , \qquad (12)$$

που υπακούει την ΔΕ [Άσκηση]

$$L_x G_{\text{mod}}(x,x') = \delta(x-x') - \sum_{\lambda_n = 0} \psi_n(x)\psi_n^*(x') . \qquad (13)$$

Πόλοι, ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις: Ας υποθέσουμε ότι η ιδιοτιμή λ_0 μηδενίζεται για συγκεκριμένες επιλογές παραμέτρων και έστω ψ_0 η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση.
Η συνάρτηση Green συμπεριφέρεται ως

$$G(x,x') \simeq \psi_0(x)\psi_0^*(x')/\lambda_0 , \qquad \lambda_0 \to 0 . \qquad (14)$$

Άρα γνωρίζοντας την συνάρτηση Green μπορούμε να υπολογίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις μηδενικής ιδιοτιμής.

Με μικρή μετατροπή του παραπάνω συλλογισμού μπορούμε να βρούμε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις μέσω της εξίσωσης Green

$$(L_x - \lambda) G_\lambda(x, x') = \delta(x - x') \ , \qquad x \in [a, b] \ . \tag{15}$$

που εξαρτάται από την φασματική παράμετρο λ. Μέσω των ιδιοσυναρτήσεων έχει λύση

$$G_\lambda(x, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} \ . \tag{16}$$

Είναι προφανές ότι:

- Οι πόλοι της $G_\lambda(x, x')$ ως συνάρτηση του λ αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_n.
- Κοντά στους πόλους η $G_\lambda(x, x')$ είναι ανάλογη του γινομένου της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης στα σημεία x, x'.

$$G_\lambda(x, x') \simeq \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} \ , \qquad \lambda \to \lambda_n \ . \tag{17}$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο

Ας επιλύσουμε τη ΔΕ για τη συνάρτηση Green

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-x') \ , \quad G = G(x,x') \ , \quad 0 \leqslant x, x' \leqslant 1 \ ,$$

με οριακές συνθήκες

$$G\big|_{x=0} = G\big|_{x=1} = 0 \ .$$

Εκατέρωθεν του x' η λύση που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες είναι της μορφής

$$G(x,x') = \left\{ \begin{array}{ll} Ax \ , & x \leqslant x' \\ B(x-1) \ , & x \geqslant x' \end{array} \right\} \ .$$

Η συνέχεια στο $x = x'$ δίνει τη συνθήκη

$$Ax' = B(x'-1) \quad \Longrightarrow \quad A = C(x'-1) \ , \quad B = Cx' \ ,$$

όπου C μια νέα σταθερά

Η ασυνέχεια της παραγώγου δίνει

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x\to x'+} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x\to x'-} = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \ .$$

Οπότε

$$G(x,x') = x_< \ (x_> - 1) \ , \tag{18}$$

όπου $x_<$ ($x_>$) το μικρότερο (μεγαλύτερο) των x, x'. Η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$G(x,x') = \frac{1}{2}|x - x'| + xx' - \frac{1}{2}(x + x') \ . \tag{19}$$

- Ο όρος $\frac{1}{2}|x - x'|$ είναι η συνάρτηση Green στην πραγματική ευθεία $-\infty < x, x' < \infty$ [Άσκηση]. Ο όρος $xx' - \frac{1}{2}(x + x')$ επιλύει την ομογενή ΔΕ και είναι αναγκαίος για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες στα σημεία $x = 0$ και 1.
- Η παραπάνω παρατήρηση είναι χαρακτηριστική όλων των προβλημάτων συναρτήσεων Green.

Διαφορετικές οριακές συνθήκες: Ας υποθέσουμε τις

$$G\Big|_{x=0} = \frac{dG}{dx}\Big|_{x=1} = 0 \ .$$

Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους με πριν συλλογισμούς και με παρόμοιες πράξεις [Άσκηση].

$$G(x,x') = -x_< = \left\{ \begin{array}{ll} -x\ , & x \leqslant x' \\ -x'\ , & x \geqslant x' \end{array} \right\} \ . \tag{20}$$

Κατά αναλογία με την (19) η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$G(x,x') = \frac{1}{2}|x-x'| - \frac{1}{2}(x+x') \ .$$

Παράδειγμα 2ο

Ας επιλύσουμε τη ΔΕ για τη συνάρτηση Green

$$\frac{d^2G}{dx^2} - k^2 G = \delta(x-x') \ , \quad G = G(x,x') \ , \quad 0 \leqslant x, x' \leqslant 1 \ ,$$

με οριακές συνθήκες

$$G\big|_{x=0} = G\big|_{x=1} = 0 \ .$$

Η λύση είναι της μορφής

$$G(x,x') = \left\{ \begin{array}{ll} A \sinh kx \ , & x \leqslant x' \\ B \sinh k(x-1) \ , & x \geqslant x' \end{array} \right\} \ .$$

Η συνέχεια στο $x = x'$ δίνει τη συνθήκη

$$A \sinh kx' = B \sinh k(x'-1) \ \Rightarrow \ A = C \sinh k(x'-1) \ , \ B = C \sinh kx' \ ,$$

όπου C μια νέα σταθερά.

Η ασυνέχεια της παραγώγου δίνει

$$C = \frac{1}{k \sinh k} \ .$$

Οπότε

$$G(x, x') = \frac{1}{k \sinh k} \sinh kx_< \ \sinh k(x_> - 1) \ . \tag{21}$$

Σημειώστε ότι στο όριο $k \to 0$ παίρνουμε την (18).
Πόλοι και ιδιοσυναρτήσεις: Ας θεωρήσουμε τους πόλους $G(x, x')$ ως συνάρτηση της παραμέτρου k. Η φασματική παράμετρος $\lambda = k^2$. Απ΄ την (21) βρίσκουμε ότι οι πόλοι είναι στα σημεία

$$k_n = i\pi n \ , \qquad n = 1, 2, \dots \ , \tag{22}$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $\sinh ix = i \sin x$. Ας υποθέσουμε ότι η k τείνει στο πόλο k_n. Στό όριο έχουμε

$$G(x, x') \simeq \frac{-2 \sin n\pi x \sin n\pi x'}{n^2\pi^2 + k^2} \ , \qquad k \to k_n \tag{23}$$

Συγκρίνοντας με την (17) (επαναλαμβάνεται για ευκολία)

$$G_\lambda(x, x') \simeq \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} \ , \qquad \lambda \to \lambda_n = k_n^2 \ , \tag{24}$$

βρίσκουμε ότι:

- Οι ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές του τελεστή d^2/dx^2 είναι οι

$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x\ , \qquad \lambda_n = -n^2\pi^2\ , \qquad n = 1, 2, \ldots\ . \quad (25)$$

- Ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες $\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0$, ίδιες με την συνάρτηση Green.

Διαφορετικές οριακές συνθήκες: Ας υποθέσουμε τις

$$G\Big|_{x=0} = \frac{dG}{dx}\Big|_{x=1} = 0\ .$$

Με παρόμοια διαδικασία και πράξεις [Άσκηση]

$$G(x, x') = -\frac{1}{k\cosh k}\sinh kx_< \ \cosh k(x_> - 1)\ .$$

Στο όριο $k \to 0$ παίρνουμε την (20).

Σε αυτή την περίπτωση οι πόλοι της συνάρτησης Green είναι στα σημεία $k_n = i(n + 1/2)\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ως [Άσκηση] δείξτε ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\psi_n \sim \sin(n + 1/2)\pi x$.

Παράδειγμα 3ο

Ας υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green απ΄ τη ΔΕ

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-2\gamma\frac{d}{dx}+m^2\right)G(x,x')=\delta(x-x')\ ,\quad -\infty<x<\infty\ ,\quad (26)$$

με $\gamma, m \geqslant 0$, έτσι ώστε η $G(x,x')$ και οι παράγωγοί της να είναι πεπερασμένοι για $|x|, |x'| \to \infty$.

Μέθοδος 1η: Για $x \neq x'$ έχουμε 2ης τάξης γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

- Η λύση είναι [΄Ελεγχος]

$$G(x,x')=e^{-\gamma x}\left(Ae^{\sqrt{\gamma^2+m^2}\ x}+Be^{-\sqrt{\gamma^2+m^2}\ x}\right)\ ,\qquad x<x'$$

και

$$G(x,x')=e^{-\gamma x}\left(Ce^{\sqrt{\gamma^2+m^2}\ x}+De^{-\sqrt{\gamma^2+m^2}\ x}\right)\ ,\qquad x>x'\ .$$

- Η απαίτηση για πεπερασμένες τιμές για $|x| \to \infty$ δίνει $B = C = 0$.
- Η συνάρτηση Green είναι συνεχής στο $x = x'$ οπότε

$$G(x, x') = E\ e^{-(\gamma(x-x') + \sqrt{\gamma^2+m^2}|x-x'|)}\ .$$

- Απ′ την ασυνέχεια της παραγώγου στο $x = x'$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x\to x'-\epsilon} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x\to x'+\epsilon} = 1 \implies E = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2+m^2}}\ .$$

- Τελικά η συνάρτηση Green είναι

$$G(x, x') = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2+m^2}}\ e^{-(\gamma(x-x') + \sqrt{\gamma^2+m^2}|x-x'|)}\ . \tag{27}$$

Διακρίνουμε τις εξής οριακές περιπτώσεις:

- Θέτοντας $\gamma = 0$ στην (27) έχουμε

$$G(x,x') = \frac{1}{2m}\, e^{-m|x-x'|}\ .$$

- Θέτοντας $m = 0$ στην (27) έχουμε

$$G(x,x') = \frac{1}{2\gamma}\left\{ \begin{array}{ll} e^{-2\gamma(x-x')}\ , & x > x' \\ 1\ , & x < x' \end{array} \right\}\ . \qquad (28)$$

Αυτή δεν είναι η πιό γενική πεπερασμένη λύση για $|x|, |x'| \to \infty$ γιατί δεν χρειάζεται να πάρουμε τη σταθερά C ίση με μηδέν. Αυτή η σταθερά μπορεί να προστεθεί στην (28) μιας και αποτελεί λύση της ομογενούς στην (26).

Μέθοδος 2η: Αναπτύσσουμε σε ολοκλήρωμα Fourier

$$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx} G_k(x')$$

και βρίσκουμε ότι

$$G_k(x') = \frac{e^{ikx'}}{k^2+2i\gamma k+m^2}\ ,$$

οπότε [Άσκηση]

$$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \frac{e^{ik(x'-x)}}{k^2+2i\gamma k+m^2}\ .$$

Οι πόλοι είναι στα σημεία $k_\pm = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2+m^2})i$. Αν $x > x'$ ($x < x'$) θεωρούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης το ημικύκλιο στο κάτω (πάνω) μέρος του μιγαδικού επιπέδου που περικλείει το k_- (k_+) και βρίσκουμε το αποτέλεσμα (27) [Άσκηση].

Παράδειγμα 4ο

Ας υπολογίσουμε την συνάρτηση Green του τελεστή

$$L_x = \frac{d^2}{dx^2} \, , \qquad x \in [0,1] \, ,$$

μέσω των ιδιοσυναρτήσεων του και με οριακές συνθήκες μηδενισμού στα άκρα.

- Οι ιδιοσυναρτήσεις που ικανοποιούν $\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0$ είναι
$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\, \sin n\pi x \, , \qquad n = 1, 2, \ldots \, ,$$
με ιδιοτιμή $E_n = -\pi^2 n^2$.
- Ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^1 dx \psi_n^*(x)\psi_m(x) = 2\int_0^1 dx \, \sin n\pi x \sin m\pi x = \delta_{n,m} \, .$$

- Χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi\,\delta(x)\ , \qquad -\pi < x < \pi\ ,$$

μπορεί να δειχθεί ότι ικανοποιούν και τη σχέση πληρότητας [Άσκηση]

$$\sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x') = \delta(x-x')\ .$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} G(x,x') &= -\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\ \sin n\pi x'}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi(x+x')}{n^2} - \frac{\cos n\pi(x-x')}{n^2} \end{aligned}$$

- Χρησιμοποιώντας τη απειροσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi z}{2} + \frac{z^2}{4} , \qquad 0 \leqslant z \leqslant 2\pi ,$$

- έχουμε τελικά

$$G(x, x') = \frac{1}{2}|x - x'| + xx' - \frac{1}{2}(x + x') .$$

Η τελευταία έκφραση δεν είναι παρά η (19), δηλαδή αυτή που βρήκαμε με συρραφή των λύσεων.

Η συμπλήρωση των αναγκαίων βημάτων στους παραπάνω υπολογισμούς αφήνεται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 5ο

Η εξίσωση Green για τον τελεστή Laplace στον τρισδιάστατο ελεύθερο χώρο είναι

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \tag{29}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \ ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$. Αυτές είναι ήδη κανονικοποιημένες έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}\ \Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ . \tag{30}$$

Για την συνάρτηση Green έχουμε

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= 4\pi \int d^3\mathbf{k}\ \frac{\Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ e^{ikR\cos\theta}\ , \qquad \mathbf{R} = \mathbf{x}-\mathbf{x}'\ ,
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποίησα σφαιρικές συντεταγμένες και διάλεξα τον άξονα z στη διεύθυνση του $\mathbf{R}$.

- Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ δίνει ένα παράγοντα 2π, η δε ολοκλήρωση ως προς θ είναι

$$
\int_0^\pi d\theta \sin\theta\ e^{ikR\cos\theta} = \int_{-1}^{1} d\alpha\ e^{ikR\alpha} = \frac{2}{kR}\sin kR\ ,
$$

  όπου άλλαξα τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $\alpha = \cos\theta$.
- Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= \frac{2}{\pi R}\int_0^\infty dk\ \frac{\sin kR}{k} \\
&= \frac{1}{R}\ ,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

  Στα πλαίσια του ηλεκτρομαγνητισμού είναι το πεδίο

Ας θεωρήσουμε την ίδια ΔΕ Green (29) αλλά στον ημιχώρο $z > 0$ και με οριακή συνθήκη $G|_{z=0} = 0$.

- Οι κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\; e^{i(k_1 x + k_2 y)}\; \sin k_3 z \ ,$$

  με ιδιοτιμή $-k^2$ και $-\infty < k_1, k_2 < \infty$, $0 < k_3 < \infty$. Η κανονικοποίησή τους είναι όπως στην (30).
- Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορεί να δειχθεί [Άσκηση] ότι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \ . \end{aligned}$$

- Στα πλαίσια του ηλεκρομαγνητισμού αυτό είναι το δυναμικό μοναδιαίου σημειακού φορτίου πάνω από γειωμένο απείρων διαστάσεων αγωγό στο $z = 0$ και ο 2ος όρος είναι το πεδίο του ειδώλου του.

Τι θα άλλαζε αν η οριακή συνθήκη στο $z = 0$ ήταν $\partial_z G|_{z=0} = 0$;

- Σ' αυτήν τη περίπτωση οι κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\; e^{i(k_1 x + k_2 y)}\;\cos k_3 z\;,$$

  με ιδιοτιμή $-k^2$ και $-\infty < k_1, k_2 < \infty$, $0 < k_3 < \infty$. Η κανονικοποίησή τους είναι όπως στην (30).

- Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορεί να δειχθεί [Άσκηση] ότι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \;&=\; \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\;. \end{aligned}$$

- Στη Φυσική αυτή μπορεί να παριστάνει τη θερμοκρασία σταθερής κατάστασης στον ημιχώρο $z > 0$ εξαιτίας σημειακής πηγής θερμότητας πάνω από απείρων διαστάσεων μονωτή στο $z = 0$.

Παράδειγμα 6ο

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Green στον τρισδιάστατο ελεύθερο χώρο

$$(\nabla^2 - m^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ . \qquad (32)$$

Για την συνάρτηση Green έχουμε

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 4\pi \int d^3\mathbf{k}\, \frac{\Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ e^{ikR\cos\theta} \ , \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace (30), σφαιρικές συντεταγμένες και διάλεξα τον άξονα z στη διεύθυνση του $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

- Το ολοκληρώματα ως προς ϕ και θ είναι όπως και πρίν και δίνουν τον παράγοντα

$$4\pi \frac{\sin kR}{kR} \ .$$

- Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{2}{\pi R} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \sin kR \\ &= \frac{e^{-mR}}{R} \, . \end{aligned} \tag{33}$$

  Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης.

- Η εξίσωση Green που επιλύσαμε εμφανίζεται σε θεωρίες πεδίου στις οποίες οι φορείς των αλληλεπιδράσεων είναι σωματίδια μάζας m.
  Π.χ. τα σωμάτια $W^{\pm}$ και Z των ασθενών αλληλεπιδράσεων, εν αντιθέσει με το φωτόνιο τον ηλεκτρομαγνητικών.
  - Το αντίστοιχο δυναμικό είναι της μορφής (33) και ονομάζεται δυναμικό Yukawa.
  - Χαρακτηριστική είναι η εκθετική πτώση του δυναμικού με σταθερά $1/m$. Για μικρές αποστάσεις συμπεριφέρεται ως δυναμικό Coulomb.

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της εξίσωσης Green: Θεωρούμε σφαιρικώς συμμετρική λύση εξαρτόμενη απ΄ την μεταβλητή R, της μορφής

$$G(R) = \frac{F(R)}{R} \ . \tag{34}$$

- $F(R)$ πρέπει να είναι μια ομαλή συνάρτηση του R και να ικανοποιεί $F(0) = 1$.
- Η $1/R$ εξάρτηση για $R \to 0$, εγγυάται την εμφάνιση της δ-συνάρτησης στο δεξί μέλος της (32).
- Για σφαιρικώς συμμετρικές λύσεις και αντικαθιστώντας την (34), η (32) γράφεται:

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dG}{dR}\right) - m^2 G = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2F}{dR^2} - m^2 F = 0 \ .$$

Η φυσικώς αποδεκτή λύση της τελευταίας είναι η $F = e^{-mR}$.

Παράδειγμα 7ο

Θεωρούμε την εξίσωση Green στον διδιάστατο ελεύθερο χώρο

$$(\nabla^2 - m^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ . \tag{35}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\pi} \ ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$. Αυτές είναι ήδη κανονικοποιημένες έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} \ \Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ . \tag{36}$$

Η συνάρτηση Green είναι (με χρήση πολικών συντεταγμένων)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -2\pi \int d^2\mathbf{k} \ \frac{\Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2 + m^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk \ \frac{k}{k^2 + m^2}\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{ikR\cos\phi} \ , \qquad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \ . \end{aligned}$$

- Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ δίνει

$$\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{ikR\cos\phi} = 2\pi J_0(kR) \ ,$$

όπου $J_0(x)$ η συνάρτηση Bessel.

- Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\int_0^\infty dk \ \frac{k}{k^2+m^2} J_0(kR) \\ &= -K_0(mR) \ , \end{aligned} \tag{37}$$

όπου $K_0(x)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2ου είδους.

- Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της $K_0(x)$:
  - Για μικρές αποστάσεις βρίσκουμε

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq \ln(mR) \ , \qquad \text{για} \quad mR \ll 1 \ ,$$

  που είναι η λύση της εξίσωσης Green στον ελεύθερο διδιάστατο χώρο.
  - Παρατηρούμε την εκθετική πτώση πτώση τύπου Yukawa

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq -\sqrt{\frac{\pi}{2mR}} \ e^{-mR} \ , \qquad \text{για} \quad mR \gg 1 \ ,$$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της εξίσωσης Green: Θεωρούμε σφαιρικώς συμμετρική λύση $G(R)$. Τότε έχουμε

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dG}{dR}\right) - m^2 G = \frac{\delta(R)}{R}$$

Θέτοντας $mR = x$ και χρησιμοποιώντας ότι $\delta(x/m) = m\delta(x)$,

$$xG'' + G' - xG = \delta(x)\ .$$

- Αυτή είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel με δείκτη $\nu = 0$, με τη διαφορά ότι το δεξί μέλος της έχει $\delta(x)$. Οι λύσεις της είναι $I_0(x)$ και $K_0(x)$, εκ των οποίων η δεύτερη είναι ανάλογη του $\ln x$, για $x \ll 1$.
- Η λύση με φθίνουσα συμπεριφορά για $mR \gg 1$ είναι ανάλογη της $K_0(mR)$.
- Λόγω του ότι $K_0(mR) \simeq -\ln(mR)$, για $mR \ll 1$ και πρέπει να έχουμε $G \simeq \ln(mR)$, η σταθερά αναλογίας πρέπει να είναι -1. Το αποτέλεσμα είναι η (37).